Über das Maß von Raumwinkeln *

Leonhard Euler

§1 Wie ebene Winkel durch von ihnen aufgespannte Kreisbogen gemessen werden, wenn natürlich die Spitze des Winkels im Kreiszentrum liegt, so scheint es in der Natur der Sache zu liegen, dass Raumwinkel durch entsprechende Anteile einer Kugeloberfläche gemessen werden, welche sie quasi aufspannen, wenn die Spitze des Winkels im Mittelpunkt der Kugel liegt. Wenn also der Raumwinkel aus drei Winkeln, welche a, b, c seien, gebildet war und um die Spitze herum eine Kugel beschrieben wird, deren Radius mit der Einheit ausgedrückt werde, wird das Maß dieses Raumwinkels zurecht der Fläche des Kugeldreiecks gleich gesetzt werden, dessen Seiten jenen Winkeln a, b und c gleich sind; weil diese Seiten ja die Maße dieser ebenen Winkel sind. In der gleichen Weise, wenn der Raumwinkel aus vier oder mehreren ebenen Winkeln gebildet war, wird sein Maß die Fläche des Kugelvierecks oder des entsprechenden Polygons von mehreren Seiten sein, dessen einzelne Seiten den ebenen Winkeln gleich sind, mit welchen der Raumwinkel gebildet wird. Mit dieser Methode wird die Dimension der Raumwinkel auf die Untersuchung der Fläche eines Kugeldreiecks oder eines Kugelpolygons entsprechend vieler Seiten zurückgeführt, dessen Seiten jeweils gegeben waren. Weil also die Fläche eines Kugeldreiecks sehr leicht aus seinen Winkeln in Erfahrung gebracht wird, so wie schon vor einiger Zeit vom höchst scharfsinnigen Geometer Albert Girard bewiesen worden ist, möchte ich diesen Beweis, weil er ja im Allgemeinen nicht hinreichend bekannt scheint, hier beifügen.

*Originaltitel: "De mensura angulorum solidorum", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1778: II* (1781, verfasst 1775): pp. 31–54, Nachdruck in: Opera Omnia, Serie 1, Band 26, pp. 204 – 223, Eneström-Nummer E514, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Lemma

§2 *Die Fläche des Kugelstücks* (Fig .1)[1] *enthalten zwischen zwei im Winkel α zueinander geneigten Meridianen verhält sich zur Oberfläche der ganzen Kugel wie der Winkel α zu* $360°$.

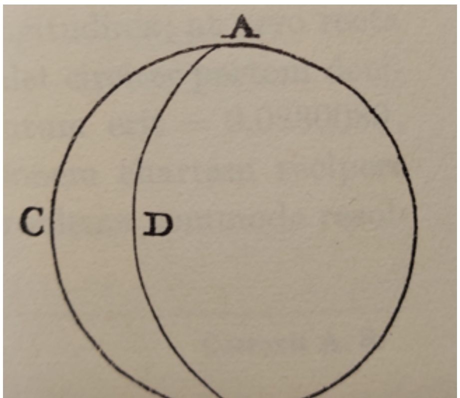


Fig. 1

Es seien ACB und ADB zwei halbe Großkreise auf der Kugeloberfläche, die sich in den gegenüberliegenden Polen A und B schneiden und zueinander im Winkel CAD oder $CBD = \alpha$ geneigt sind, und es ist ersichtlich, dass die Fläche dieses Kugelsektors $ACBDA$ so oft in der ganzen Kugeloberfläche enthalten ist, wie der Winkel α in 360 enthalten ist.

§3 Wenn also der Kugelradius $= r$ gesetzt wird, weil die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4\pi rr$ ist, während π den Umfang des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist, wird die Fläche unseres Kreissektors $= 4\pi rr \cdot \frac{\alpha}{360°}$ sein, wenn freilich der Winkel α in Grad ausgedrückt wird; aber wenn α in Teilen des Radius gegeben ist, welcher immer mit der Einheit ausgedrückt werde, wird wegen $360° = 2\pi$ die Fläche des Kugelsektors $= 2\alpha rr$ sein; wenn also der Kugelradius gleichermaßen der Einheit gleich gesetzt wird, wird diese Fläche $= 2\alpha$ sein. Auf diese Weise wird also die Fläche dieses Sektors durch einen einfachen Winkel dargestellt werden können, während die ganze Oberfläche $= 4\pi$ ist.

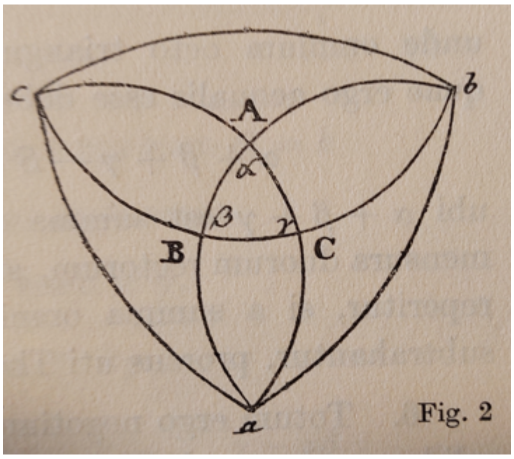
[1] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

THEOREM
VON ALBERT GIRARD

§4 *Die Fläche des Kugeldreiecks ist immer gleich dem Winkel, um welchem die Summe aller drei Winkel des Kugeldreiecks zwei rechte übersteigt.*

BEWEIS

Es sei (Fig. 2)[2] das Kugeldreieck ABC vorgelegt, dessen Fläche gesucht wird, und seine Winkel bezeichne man mit den Buchstaben α, β, γ.



Nun verlängere man zuerst die Seiten AB und AC auf der Kugeloberfläche, bis sie sich schließlich wiederum im Pol a treffen, dem Winkel A gegenüber, und weil diese Bogen ABa und ACa als zwei Meridiane angesehen werden können, die voneinander um dem Winkel α entfernt sind, wird die Fläche dieses Sektors $AcaB = 2\alpha$ sein. Weiter setze man in gleicher Weise die zwei Seiten BA und BC bis hin zu b fort, welcher Punkt ebenso ein Pol sein wird, gegenüber von B, und die Fläche dieses Sektors $BAbC$ wird $= 2\beta$ sein. Schließlich verlängere man auch die Seiten CA und CB bis hin zum Pol C, gegenüber von c, und die Fläche dieses Sektors $CBcA$ wird $= 2\gamma$ sein. Wenn daher also die gesuchte Fläche des Dreiecks $ABC = S$ genannt wird, werden die Flächen der folgenden Dreiecke bekannt werden:

[2]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$\text{I.} \quad aBC = 2\alpha - S,$$
$$\text{II.} \quad bAC = 2\beta - S,$$
$$\text{III.} \quad cAB = 2\gamma - S.$$

Weil nun die Punkte a, b, c auf der Kugeloberfläche den Punkten A, B und C vom Durchmesser aus betrachtet gegenüber liegen, werden sie zueinander dieselben Abstände haben, obgleich die Figur weit anders erscheint. Daher, nachdem die Bogen ab, bc, ca gezeichnet worden sind, wird $ab = AB$, $ac = AC$ und $bc = BC$ sein; daher wird auch die Fläche dieses Dreiecks abc, welches in der zweiten Region der Kugel liegt, $= S$ sein; sodass nun die ganze Kugeloberfläche folgendes beinhaltet: 1) die Dreiecke $ABC = S$ und $abc = S$; 2) die Dreiecke $aBC = 2\alpha - S$, $bAC = 2\beta - S$ und $cAB = 2\gamma - S$. Außerdem enthält die Figur aber die Dreiecke abC, acB und bcA, die Fläche von letztgenannten wird aus den oberen bekannt; dann ist für das erste Dreieck abC die Seite $ab = AB$, die Seite $aC = Ac$ und $bC = Bc$; daher ist dieses Dreieck abC offensichtlich $= ABc = 2\gamma - S$. In derselben Weise wird eingesehen, dass das Dreieck $acB = ACb = 2\beta - S$ sein wird; und schließlich $bcA = BCa = 2\alpha - S$.

§5 Weil daher die ganze Kugeloberfläche hier in acht Dreiecke aufgeteilt ist, deren jeweilige Flächen wir hier dargeboten haben, muss deren Summe gleich der ganzen Kugeloberfläche, also 4π, gleich sein; aus dieser Gleichheit wird die gesuchte Fläche S bestimmt werden können. Wir wollen also diese einzelnen Dreiecken zusammen mit ihren Flächen auflisten:

I.	$ABC = S$	III.	$aBC = 2\alpha - S$	VI.	$Abc = 2\alpha - S$
II.	$abc = S$	IV.	$bAC = 2\beta - S$	VII.	$Bac = 2\beta - S$
		V.	$cAB = 2\gamma - S$	VIII.	$Cab = 2\gamma - S$

$$\text{Summe } = 2S + 2(\alpha+\beta+\gamma) - 3S + 2(\alpha+\beta+\gamma) - 3S,$$

woher die Summe aller acht Dreiecke als $= 4(\alpha+\beta+\gamma) - 4S$ zu berechnet wird, welche also gleich 4π sein muss, woher nach Teilen durch vier

$$\alpha+\beta+\gamma - S = \pi \quad \text{und daher} \quad S = \alpha+\beta+\gamma-\pi$$

entspringt, wo $\alpha + \beta + \gamma$ die Summe aller Winkel des vorgelegten Dreiecks ist, und π ist das Maß zweier rechter Winkel, oder 180°, und so findet man die Fläche des vorgelegten Kugeldreiecks, wenn von der Summe aller Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ zwei rechte oder 180° abgezogen werden, genauso wie es das Theorem lehrt.

§6 Also wird die ganze Aufgabe für das Maß von Raumwinkeln darauf zurückgeführt, dass aus den drei gegebenen Seiten des Kugeldreiecks seine Fläche bestimmt wird; deswegen wollen wir die Lösung des folgenden Problems in Angriff nehmen.

ALLGEMEINES PROBLEM

Nachdem im Kugeldreieck (Fig. 3)[3] *die drei Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ gegeben worden sind, die Fläche dieses Kugeldreiecks ausfindig zu machen.*

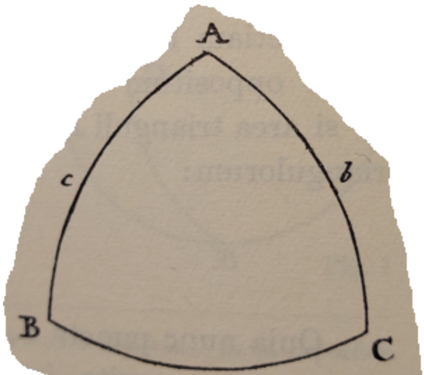


Fig. 3

LÖSUNG

§7 Die Buchstaben A, B, C bezeichnen die Winkel dieses Dreiecks und man setze seine Fläche, welche wir suchen, $= S$, und wir haben gerade gesehen, dass $S = A + B + C - 180°$ sein wird. Daher wird also

$$\sin S = -\sin(A + B + C) \quad \text{und} \quad \cos S = -\cos(A + B + C)$$

[3]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

sein, und daher $\tan S = +\tan(A+B+C)$; und so ist nur notwendig, dass anstelle der Winkel A, B, C die Seiten a, b, c in die Rechnung eingeführt werden. Aber nach den Lehren der Kugelgeometrie werden die Winkel aus den gegebenen Seiten so bestimmt, dass gilt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \quad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c},$$
$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

woher weiter die Sinus derselben Winkel abgleitet werden

$$\sin A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin b \sin c},$$
$$\sin B = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin c},$$
$$\sin C = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b},$$

wo wir anstelle der Wurzel

$$\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c} = k$$

setzen wollen und, um die Rechnung zu verkürzen, wollen wir für die Zähler

$$\cos a = \alpha, \quad \cos b = \beta \quad \text{und} \quad \cos c = \gamma$$

setzen, dass

$$kk = 1 - \alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2\alpha\beta\gamma$$

ist. Danach wird

$$\cos A = \frac{\alpha - \beta\gamma}{\sin b \sin c}, \quad \cos B = \frac{\beta - \alpha\gamma}{\sin a \sin c}, \quad \cos C = \frac{\gamma - \alpha\beta}{\sin a \sin b},$$
$$\sin A = \frac{k}{\sin b \sin c}, \quad \sin B = \frac{k}{\sin a \sin c}, \quad \sin C = \frac{k}{\sin a \sin b}$$

sein.

§8 Wir wollen nun zuerst die Winkel A und B zusammenführen und werden

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{k(1-\gamma)(\alpha+\beta)}{\sin a \sin b \sin^2 c},$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \frac{(\alpha-\beta\gamma)(\beta-\alpha\gamma)-kk}{\sin a \sin b \sin^2 c}$$

finden. Wenn wir nun den dritten Winkel C hinzufügen, wird

$$\begin{aligned}\sin(A+B+C) &= \sin A \cos B \cos C \ + \sin B \cos A \cos C \\ &+ \sin C \cos A \cos B \ - \sin A \sin B \sin C, \\ \cos(A+B+C) &= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C \\ &- \cos B \sin A \sin C \ - \cos C \sin A \sin B\end{aligned}$$

sein. Es ist also nur übrig, dass in diesen Formeln anstelle der Großbuchstaben A, B, C die gerade angegebenen Werte eingesetzt werden.

ERSTE UNTERSUCHUNG: FÜR $\sin S$

§9 Weil $\sin S = -\sin(A+B+C)$ ist, wird

$$\begin{aligned}\sin S &= \sin A \sin B \sin C \ - \sin A \cos B \cos C \\ &- \sin B \cos A \cos C - \sin C \cos A \cos B\end{aligned}$$

sein, weil welcher Ausdruck aus vier Termen besteht, wollen wir sie einzeln entwickeln. Es wird also sein:

$$\text{I.}\quad \sin A \sin B \sin C = \frac{k^3}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} = \frac{k(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\text{II.}\quad \sin A \cos B \cos C = \frac{k(\beta-\alpha\gamma)(\gamma-\alpha\beta)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} = \frac{k(\beta\gamma-\alpha\beta\beta-\alpha\gamma\gamma+\alpha\alpha\beta\gamma)}{\sin^2 \alpha \sin^2 b \sin^2 c},$$

$$\text{III.}\quad \sin B \cos A \cos C = \frac{k(\alpha-\beta\gamma)(\gamma-\alpha\beta)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} = \frac{k(\alpha\gamma-\beta\alpha\alpha-\beta\gamma\gamma+\beta\beta\alpha\gamma)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$

$$\text{IV.}\quad \sin C \cos A \cos B = \frac{k(\alpha-\beta\gamma)(\beta-\alpha\gamma)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} = \frac{k(\alpha\beta-\gamma\alpha\alpha-\gamma\beta\beta+\gamma\gamma\alpha\beta)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Weil man also überall denselben Nenner

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = (1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)$$

hat, werden die drei letzten Glieder, zu einer Summe zusammengefasst,

$$\frac{k(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\beta-\alpha\gamma\gamma-\beta\gamma\gamma-\alpha\alpha\beta-\alpha\alpha\gamma-\beta\beta\gamma+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}$$

geben.

§10 Um diese Formeln besser handhabbarer zu machen, wollen wir der Kürze wegen festlegen:

$$\alpha+\beta+\gamma = p, \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = q \quad \text{und} \quad \alpha\beta\gamma = r,$$

und es wird daher

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = pp-2q$$

sein, woher

$$kk = 1-pp+2q+2r$$

wird. Weil weiter

$$pq = \alpha\alpha\beta+\alpha\alpha\gamma+\beta\beta\alpha+\beta\beta\gamma+\gamma\gamma\alpha+\gamma\gamma\beta+3\alpha\beta\gamma$$

ist, wird

$$\alpha\alpha(\beta+\gamma)+\beta\beta(\alpha+\gamma)+\gamma\gamma(\alpha+\beta)=pq-3r$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte die drei letzten Glieder zusammengenommen

$$\frac{k(q-pq+3r+pr)}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}$$

liefern, welche Summe vom ersten Glied

$$=\frac{k(1-pp+2q+2r)}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}$$

subtrahiert das zurücklässt, was wir suchen, nämlich:

$$\sin S=\frac{k(1+q-r-pp+pq-pr)}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)};$$

dort wird es förderlich sein, bemerkt zu haben, weil, nach Setzen von $\alpha=1$, der Nenner verschwindet, dass in demselben Fall auch der Zähler verschwinden muss, was auch in den Fällen $\beta=1$ und $\gamma=1$ geschehen muss, sodass der Zähler notwendigerweise die Faktoren $1-\alpha$, $1-\beta$, $1-\gamma$ hat; weil deren Produkt $1-p+q-r$ ist, wird der Zähler zugleich durch dieses teilbar sein, und nach der Teilung wird der Quotient $=1+p$ gefunden; der Nenner hingegen, durch denselben Teiler geteilt, wird

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=1+p+q+r,$$

und so resultiert diese Formel:

$$\sin S=\frac{k(1+p)}{1+p+q+r},$$

oder nach Wiedereinsetzen der Werte

$$\sin S=\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)\sqrt{1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma}}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)},$$

wo α $\cos a$, β, $\cos b$, γ $\cos c$ bezeichnet. Es wird der Mühe wert sein, diese Formel an einigen Beispielen zu illustrieren.

Erstes Beispiel

§11 Es seien die Seiten b und c Viertelkreise, sodass $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ ist, und es wird $\sin S = \sqrt{1 - \alpha\alpha}$ und daher $\sin S = \sin a$ sein, als logische Konsequenz die Fläche $S = a$. Wannimmer aber die beiden Seiten AB und AC Viertelkreise sind und die Seite $BC = a$, werden die beiden Winkel B und C rechte Winkel sein, und wegen $\cos A = \alpha = \cos a$ wird der Winkel $A = a$ sein, und daher die Summe aller Winkel $= 180° + a$ und daher die gesuchte Fläche $S = a$.

Zweites Beispiel

§12 Es sei das Kugeldreieck ABC bei A rechtwinklig, und weil nach den Lehren der Kugelgeometrie $\cos BC = \cos AB \cos AC$ ist, wird $\cos a = \cos b \cos c$ sein, und daher $\alpha = \beta\gamma$; nach Einsetzen dieses Wertes wird hervorgehen:

$$\sin S = \frac{(1 + \beta + \gamma + \beta\gamma)\sqrt{1 - \beta\beta - \gamma\gamma + \beta\beta\gamma\gamma}}{(1 + \beta)(1 + \gamma)(1 + \beta\gamma)} = \frac{\sqrt{(1 - \beta\beta)(1 - \gamma\gamma)}}{1 + \beta\gamma}.$$

Weil also $\sqrt{1 - \beta\beta} = \sin b$ und $\sqrt{1 - \gamma\gamma} = \sin c$ ist, wird für die Fläche des rechwinkligen Dreiecks

$$\sin S = \frac{\sin b \sin c}{1 + \cos b \cos c} = \frac{\sin b \sin c}{1 + \cos a}$$

sein.

Drittes Beispiel

§13 Wenn das Dreieck gleichseitig oder $\alpha = \beta = \gamma$ war, wird seine Fläche so ausgedrückt werden, dass

$$\sin S = \frac{(1 + 3\alpha)\sqrt{1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3}}{(1 + \alpha)^3}$$

ist, wo der Wurzelausdruck die Faktoren $(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$ hat, woher also

$$\sin S = \frac{(1 + 3\alpha)(1 - \alpha)\sqrt{1 + 2\alpha}}{(1 + \alpha)^3}$$

werden wird. Wenn also die drei Seiten Viertelkreise waren und daher $\alpha = 0$, wird $\sin S = 1$ und daher $S = \frac{\pi}{2}$ sein.

§14 Es seien alle Seiten a, b, c des Dreiecks unendlich klein, in welchem Fall das Kugeldreieck in ein ebenes Dreieck übergeht, und weil

$$\alpha = \cos a = 1 - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{24}a^4 - \text{etc.}$$

ist und in gleicher Weise

$$\beta = 1 - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{24}b^4 - \text{etc.} \quad \text{und} \quad \gamma = 1 - \frac{1}{2}cc + \frac{1}{24}c^4 - \text{etc.},$$

wird der rationale Faktor unserer Formel $= \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$ werden, nachdem natürlich die sehr kleinen Anteile ignoriert worden sind. Aber in der irrationalen Formel haben sich nicht nur die endlichen Anteile gegenseitig auf, sondern auch die Terme, wo a, b, c zwei Dimensionen haben; deswegen müssen die einzelnen Teile bis hin zu vier Dimensionen entwickelt werden. Wir werden also folgendes haben:

$$\alpha\alpha = 1 - aa + \frac{1}{3}a^4, \quad \beta\beta = 1 - bb + \frac{1}{3}b^4, \quad \gamma\gamma = 1 - cc + \frac{1}{3}c^4$$
$$\alpha\beta = 1 - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{24}a^4 + \frac{1}{24}b^4 + \frac{1}{4}aabb$$

und daher

$$\alpha\beta\gamma = 1 - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc + \frac{1}{24}a^4 + \frac{1}{24}b^4 + \frac{1}{24}c^4 + \frac{1}{4}aabb + \frac{1}{4}aacc + \frac{1}{4}bbcc.$$

Daher berechnet man also die Größe unter der Wurzel wie folgt:

$$\begin{aligned} &- 2 + aa + bb + cc - \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{3}b^4 - \frac{1}{3}c^4 \\ &+ 2 - aa - bb - cc + \frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{12}c^4 \\ &+ \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc + \frac{1}{2}bbcc, \end{aligned}$$

welche, nach Streichen der sich aufhebenden Terme, auf diese zurückgeführt wird:

$$\frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc + \frac{1}{2}bbcc - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}c^4.$$

Weil auch die Fläche S unendlich klein ist und daher $\sin S = S$, werden wir die gesuchte Fläche haben:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc + \frac{1}{2}bbcc - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}c^4}$$

oder

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4},$$

welches die allbekannte Formel für die Fläche eines ebenen Dreiecks ist.

ZWEITE UNTERSUCHUNG: FÜR $\cos S$

§15 Weil $\cos S = -\cos(A + B + C)$ ist, wird

$$\begin{aligned}\cos S = {} & \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin A \sin C \\ & + \cos C \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos C\end{aligned}$$

sein, welche vier Terme einzeln entwickelt geben werden:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \cos A \sin B \sin C = \frac{kk(\alpha - \beta\gamma)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},\\
&\text{II.} \quad \cos B \sin A \sin C = \frac{kk(\beta - \alpha\gamma)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},\\
&\text{III.} \quad \cos C \sin A \sin B = \frac{kk(\gamma - \alpha\beta)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.
\end{aligned}$$

Für den letzten Term wird zuerst

$$\cos A \cos B = \frac{(\alpha - \beta\gamma)(\beta - \alpha\gamma)}{\sin a \sin b \sin^2 c} = \frac{\alpha\beta - \alpha\alpha\gamma - \beta\beta\gamma + \alpha\beta\gamma\gamma}{\sin a \sin b \sin^2 c}$$

sein, und daher

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha\beta\beta - \alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha\beta\gamma^3 + \alpha\gamma\beta^3 + \beta\gamma\alpha^3 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

§16 Wenn wir also wiederum $\alpha+\beta+\gamma=p$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q$ und $\alpha\beta\gamma=r$ setzen, werden die drei ersten Glieder zu einer Summe zusammengefasst

$$\frac{kk(p-q)}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}$$

geben; aber das letzte Glied, wenn es auf diese Weise dargestellt wird:

$$\frac{\alpha\beta\gamma-\alpha\alpha\beta\beta-\alpha\alpha\gamma\gamma-\beta\beta\gamma\gamma+\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)-\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c},$$

wird wegen

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=pp-2q \quad \text{und} \quad \alpha\alpha\beta\beta+\alpha\alpha\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma=qq-2pr$$

diese Form annehmen:

$$\frac{r-qq+2pr+ppr-2qr-rr}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Weil $kk=1-pp+2q+2r$ ist, werden wir nach Sammeln aller Glieder haben:

$$\cos S=\frac{(p-q)(1-pp+2q+2r)-r+qq-2pr-ppr+2qr+rr}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c},$$

welche Formel entwickelt

$$\cos S=\frac{p-q-r+2pq+ppq-ppr-qq+rr-p^3}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}$$

gibt.

§17 Weil hier wiederum der Nenner in den Fällen $\alpha=1$, $\beta=1$ und $\gamma=1$ verschwindet, ist es notwendig, dass in denselben Fällen auch der Zähler verschwindet und er daher diesen Faktor hat:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-p+q-r.$$

Nachdem also diese Division für den Zähler durchgeführt worden ist, werden wir diesen Quotienten $p-q-r+pp$ erlangen; für den Nenner wird der Quotient aber sein:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 1+p+q+r,$$

und so haben wir diesen Ausdruck erhalten:

$$\cos S = \frac{p(1+p)-q-r}{1+p+q+r};$$

und, nachdem für die Buchstaben p, q und r wieder eingesetzt worden sind, wird

$$\cos S = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(1+\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$$

sein oder auch

$$\cos S = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}.$$

Erstes Beispiel

§18 Es seien die zwei Seiten b und c Viertelkreise und daher $\beta = 0$ und $\gamma = 0$, in welchem Fall also

$$\cos S = \frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha} = \alpha = \cos a$$

hervorgehen wird; als logische Konsequenz wird also wiederum, wie oben, $S = a$ sein.

Zweites Beispiel

§19 Es sei das Kugeldreieck rechtwinklig, während der Winkel A ein rechter ist, und es wird, wie wir oben gesehen haben, $\cos a = \cos b \cos c$ oder $\alpha = \beta\gamma$ sein, nach Einsetzen welches Wertes man findet:

$$\cos S = \frac{\beta+\gamma+2\beta\gamma+\beta\beta+\gamma\gamma+\beta\beta\gamma+\beta\gamma\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)}$$

oder

$$\cos S = \frac{(\beta+\gamma)(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)} = \frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}.$$

Für denselben Fall haben wir aber oben [§ 12]

$$\sin S = \frac{\sqrt{(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}}{1+\beta\gamma}$$

gefunden, was hervorragend passt, weil daher

$$\sin^2 S + \cos^2 S = \frac{1+2\beta\gamma+\beta\beta\gamma\gamma}{(1+\beta\gamma)^2} = 1$$

wird.

Drittes Beispiel

§20 Das Dreieck sei gleichseitig oder $\alpha = \beta = \gamma$, und es wird

$$\cos S = \frac{3\alpha + 6\alpha\alpha - \alpha^3}{(1+\alpha)^3}$$

sein. Oben haben wir für diesen Fall

$$\sin S = \frac{(1+3\alpha)(1-\alpha)\sqrt{1+2\alpha}}{(1+\alpha)^3}$$

gefunden; um die Übereinstimmung dieser Ausdrücke zu zeigen, wollen wir das Quadrat jeder der beiden Formeln nehmen, und es wird hervorgehen:

$$\cos^2 S = \frac{9\alpha\alpha + 36\alpha^3 + 30\alpha^4 - 12\alpha^5 + \alpha^6}{(1+\alpha)^6}$$

und

$$\sin^2 S = \frac{(1+6\alpha+9\alpha\alpha)(1-3\alpha\alpha+2\alpha^3)}{(1+\alpha)^6} = \frac{1+6\alpha+6\alpha\alpha-16\alpha^3-15\alpha^4+18\alpha^5}{(1+\alpha)^6};$$

die Summe dieser Brüche liefert

$$\frac{1+6\alpha+15\alpha\alpha+20\alpha^3+15\alpha^4+6\alpha^5+\alpha^6}{(1+\alpha)^6} = 1.$$

Viertes Beispiel

§21 Es seien die Seiten des Dreiecks unendlich klein, und weil auch die Fläche quasi verschwindet, wird $\cos S = 1 - \frac{1}{2}SS$ sein; daher wird aus der Formel [§ 17], ausgedrückt mit den Buchstaben p, q und r,

$$1 - \frac{1}{2}SS = \frac{p(1+p) - q - r}{1 + p + q + r}$$

sein, woher man

$$SS = \frac{2 + 4q + 4r - 2pp}{1 + p + q + r}$$

berechnet, und nach Wiedereinsetzen der Werte für p, q, r wird

$$SS = \frac{2kk}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$$

werden; hier genügt es im Nenner für die Buchstaben α, β, γ die Einheit zu schreiben, wonach der Nenner 8 sein wird. Oben haben wir hingegen gesehen, dass für den Zähler

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{1 - \alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2\alpha\beta\gamma} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc + \frac{1}{2}bbcc - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}c^4} \end{aligned}$$

wird, nach Festlegen welches Wertes man

$$SS = \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{16}$$

findet, woher natürlich

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}$$

wird.

Dritte Untersuchung:

Für $\tan S$ und $\tan \frac{1}{2}S$

§22 Nachdem wir für die Fläche unseres Kugeldreiecks so $\sin S$ wie $\cos S$ gefunden haben, geht unmittelbar der Tangens dieser Fläche hervor, nämlich:

$$\tan S = \frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)\sqrt{1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma}}{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma},$$

welche Formel sich im Allgemeinen nicht kürzer ausdrücken lässt.

§23 Aber der Tangens der halben Fläche, oder $\tan \frac{1}{2}S$, wird um vieles gefälliger ausgedrückt werden können. Weil nämlich

$$\tan \frac{1}{2}S = \frac{\sin S}{1+\cos S}$$

ist, wollen wir zu Beginn die Buchstaben p, q und r beibehalten, sodass wir für den Zähler

$$\sin S = \frac{(1+p)\sqrt{1-pp+2q+2r}}{1+p+q+r}$$

haben, aber für den Nenner wird, wegen

$$\cos S = \frac{p(1+p)-q-r}{1+p+q+r},$$

auch

$$1+\cos S = \frac{(1+p)^2}{1+p+q+r}$$

sein; daher findet nach Einsetzen dieser Werte

$$\tan \frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{1-pp+2q+2r}}{1+p}$$

und nach Wiedereinsetzen der Werte

$$\tan \frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma}}{1+\alpha+\beta+\gamma};$$

diese Formel ist zur Anwendung natürlich am besten geeignet.

Erstes Beispiel

§24 Wenn die beiden Seiten b und c Viertelkreise und daher $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ waren, wird

$$\tan\frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{1-\alpha\alpha}}{1+\alpha} = \frac{\sin a}{1+\cos a}$$

sein; daher ist es offenkundig, dass $\tan\frac{1}{2}S = \tan\frac{1}{2}a$ und daher $S = a$ sein wird, wie wir schon oben gefunden haben.

Zweites Beispiel

§25 Es sei das Kugeldreieck bei A rechtwinklig und daher $\cos a = \cos b \cos c$ und $\alpha = \beta\gamma$; nachdem aber dieser Wert eingesetzt worden ist, findet man

$$\tan\frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{1-\beta\beta-\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma}}{1+\beta+\gamma+\beta\gamma} = \frac{\sqrt{(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}}{(1+\beta)(1+\gamma)},$$

welcher Bruch, mit $\sqrt{(1+\beta)(1+\gamma)}$ gekürzt, auf diesen zurückgeführt wird:

$$\tan\frac{1}{2}S = \sqrt{\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{(1+\beta)(1+\gamma)}}.$$

Es ist aber

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}} = \tan\frac{1}{2}b$$

und in gleicher Weise

$$\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} = \tan\frac{1}{2}c;$$

deshalb resultiert die folgende höchst bemerkenswerte Formel:

$$\tan\frac{1}{2}S = \tan\frac{1}{2}b \cdot \tan\frac{1}{2}c,$$

deren Übereinstimmung mit den oben gefunden ohne Mühe gezeigt wird.

Drittes Beispiel

§26 Wenn das Dreieck gleichseitig oder $\alpha = \beta = \gamma$ war, wird

$$\tan\frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{1 - 3\alpha\alpha + 2\alpha^3}}{1 + 3\alpha} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{1+2\alpha}}{1+3\alpha}$$

sein; daher wird in dem Fall, in dem die einzelnen Seiten Viertelkreise sind und daher $\alpha = 0$ ist, wird

$$\tan\frac{1}{2}S = 1 \quad \text{und daher} \quad \frac{1}{2}S = 45^\circ \quad \text{und} \quad S = \frac{\pi}{2}$$

sein.

Viertes Beispiel

§27 Es seien zuletzt die drei Seiten a, b, c unendlich klein, und weil $\tan\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$ ist, wird

$$S = \frac{2\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma}}{1 + \alpha + \beta + \gamma}$$

sein. Nun genügt es also für den Nenner $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ zu nehmen, sodass der Koeffizient des Wurzelausdrucks $= \frac{1}{2}$ ist; wir haben aber schon des Öfteren oben gesehen, dass der Wurzelausdruck

$$\sqrt{\frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc + \frac{1}{2}bbcc - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}c^4}$$

ist, woher die Fläche genauso wie zuvor ausgedrückt wird.

Problem

§28 *Nachdem der Raumwinkel AOBC,* (Fig. 4)[4] *gebildet aus den drei ebenen Winkel $BOC = a$, $AOC = b$ und $AOB = c$, sein wahres Maß anzugeben.*

[4]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version

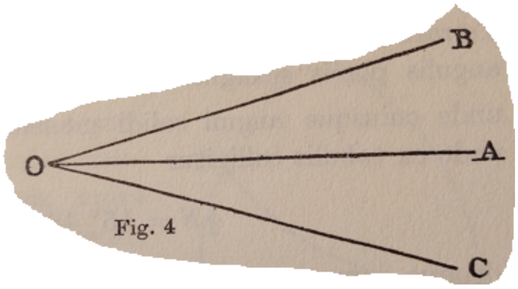


Fig. 4

LÖSUNG

Weil ja das Maß dieses Raumwinkels der Fläche des Kugeldreiecks, dessen Seiten a, b, c seien, während der Radius der Kugel $= 1$ ist, gleich gesetzt werden kann, wird aus den vorhergehenden Überlegungen eingesehen, dass die Raumwinkel, genauso wie die ebenen, entweder in Grad und Minuten oder mit Kreisbogen ausgedrückt werden können. Wir wollen also festlegen, dass S das Maß des vorgelegten Raumwinkels ist, und, nachdem der Kürze wegen $\cos a = \alpha$, $\cos b = \beta$, $\cos c = \gamma$ gesetzt worden ist, wird dieses Maß in dreifacher Weise angegeben werden können; denn zuerst wird durch die Sinus sein:

$$\sin S = \frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\sqrt{1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma};$$

weiter durch die Kosinus:

$$\cos S = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)};$$

als drittes, tatsächlich am gefälligsten, über den Tangens der Hälfte:

$$\tan\frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma}}{1+\alpha+\beta+\gamma}.$$

Hier wird es besonders förderlich sein bemerkt zu haben, wenn alle drei Winkel a, b, c rechte waren, dass dann das Maß des Raumwinkels als $= 90^\circ$ hervorgeht; das stimmt wunderbar mit der gemeinen Redensweise überein, dass Raumwinkel von dieser Art auch von Handwerken rechte Winkel genannt werden; daher lässt sich zugleich einsehen, welche Winkel entweder größer oder kleiner als ein rechter einzustufen sind.

SCHOLION 1

§29 Es wäre wunderbar, wenn dieses Maß von Raumwinken auch zu besonderen Eigenschaften von solcher Art führen würde, wie sie für ebene Figuren Geltung haben, wie beispielsweise, dass die Summe aller ebenen Winkel zwei rechten gleich sind. Dennoch tritt eine solche Eigenschaft bei Körpern nicht auf, wenn unser unser Maß gewählt wird. Denn nicht einmal bei Tetraedern, die aus vier Raumwinkeln bestehen, hat die Summe aller Raumwinkel dieselbe Größe, sondern je nachdem ob das Tetraeder mehr oder weniger schräg konstruiert wird, kann die Summe der vier Raumwinkel mal größer mal kleiner werden. Wenn wir nämlich das reguläre Tetraeder einer Untersuchung unterwerfen, dessen einzelne Raumwinkel aus drei ebenen Winkeln von sechzig Grad gebildet werden, werden wir $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ haben; daher wird das Maß dieses Raumwinkels so gefunden, dass $\tan \frac{1}{2}S = \frac{\sqrt{2}}{5}$ ist, woraus man aus Tabellen

$$\frac{1}{2}S = 15^\circ 48' \quad \text{oder} \quad S = 31^\circ 36'$$

berechnet und daher wird die Summe aller vier Winkel dieses Tetraeders $126^\circ 24'$ sein. Nun wollen wir eine triangulare Pyramide betrachten, deren Basis ebenso ein gleichseitiges Dreieck sei, aber die Spitze sei unendlich spitz, deren Maß deshalb verschwinden wird; aber für die drei Raumwinkel der Basis wird einer $a = 60^\circ$, die beiden übrigen hingegen $b = c = 90^\circ$ sein, sodass $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \gamma = 0$ sein; daher geht

$$\tan \frac{1}{2}S = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \quad \text{hervorgeht, sodass} \quad S = 60^\circ$$

ist; daher wird die Summe aller Raumwinkel dieser Pyramide 180° sein, obwohl sie zuvor für das Tetraeder nur 126° war. Obwohl sich aber in der Summe der Raumwinkel eines Festkörpers keine außergwöhnliche Eigenschaft offenbart, wird bei anderen Beziehungen dieses Maß vielleicht nicht zu verachtende Eigenschaften offenlegen können.

SCHOLION 2

§30 Was bisher alles gelehrt worden ist betrifft das Maß der Raumwinkel, die aus nur drei ebenen Winkel zusammengesetzt sind. Aber wenn der Raumwinkel aus vier oder mehreren Winkeln gebildet worden ist, wird sei

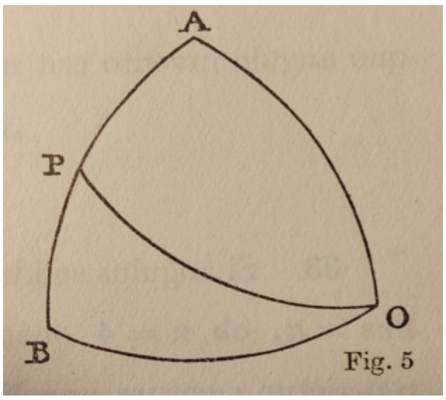
Maß die Fläche eines Kugelvierecks oder eines entsprechenden Polygons von mehreren Seiten sein, deren einzelne Seiten den eben Winkel gleich sind, die den Festkörper beschreiben. Dann ist also nichts anders nötig, als dass ein solches Polygon in Kugeldreiecke aufgeteilt wird und die Flächen von den einzelnen ausfindig gemacht werden, deren Summe natürlich das Maß des Raumwinkels geben wird. In diesen Fällen genügt es aber nicht, nur die einzelnen Winkel zu kennen, sondern es ist darüber hinaus notwendig, dass die gegenseitige Neigung von je zweien oder mehreren bekannt ist. Weil diese Dinge hinreichend klar sind, möchte ich hier nur die Dimension von gewöhnlichen Raumwinkeln hinzufügen, die aus beliebig vielen einander gleichen und gleichermaßen geneigten ebenen Winkeln gebildet werden.

PROBLEM

§31 *Wenn der Raumwinkel aus n gleichen ebenen Winkeln zusammengesetzt ist, welche jeweils = a seien und gleich zueinander geneigt sind, das Maß dieses Raumwinkels zu finden.*

LÖSUNG

Wenn diesem Raumwinkel (Fig. 5)[5] eine Kugel umschrieben aufgefasst wird, deren Radius $= 1$ ist, wird sein Maß ein reguläres Kugelpolygon sein, all dessen Seiten $= a$ sein werden und deren Anzahl $= n$ sein wird;



und weil auch alle Winkel einander gleich sein werden, wird das Polygon regelmäßig sein und in seiner Mitte sein Mittelpunkt gegeben sein, welcher

[5]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

in O sei; aber jede Seite des Polygons sei $AB = a$, von deren Enden aus man zu O die Bogen AO und BO zeichne, welche einander gleich sein werden, dass man das Dreieck AOB hat. Weil also die Anzahl solcher Dreiecke $= n$ ist, wird

$$\text{der Winkel } AOB = \frac{2\pi}{n}$$

sein; aber wenn die Fläche des ganzen Polygons $= S$ gesetzt wird, welche zugleich das Maß des vorgelegten Winkels sein wird, wird die Fläche dieses Dreiecks $AOB = \frac{S}{n}$ sein. Nun zeichne man von O aus zur Seite AB die Normale OP, welche die Seite AB zweiteilt, und es wird $AP = \frac{1}{2}a$ und der Winkel $AOP = \frac{\pi}{n}$ sein. Man nenne nun den Winkel $OAB = \varphi$, und aus der Kugelgeometrie wird

$$\sin\varphi = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{1}{2}a}$$

sein. Weil also diesem Winkel φ auch der Winkel OBA gleich ist, wird die Summe der Winkel des Dreiecks $AOB = 2\varphi + \frac{2\pi}{n}$ sein, woher nach Abzug von zwei rechten Winkeln die Fläche des Dreiecks AOB

$$\frac{S}{n} = 2\varphi + \frac{2\pi}{n} - \pi$$

sein wird, und daher die Fläche des ganzen Polygons

$$S = 2n\varphi + 2\pi - n\pi = 2n\varphi - (n-2)\pi,$$

welche also das Maß des vorgelegten regulären Raumwinkels sein wird.

Korollar 1

§32 Wenn also der Raumwinkel aus drei gleichen ebenen Winkeln $= a$ besteht, wird wegen $n = 3$

$$\sin\varphi = \frac{\cos 60^\circ}{\cos\frac{1}{2}a}$$

sein; nachdem also dieser Winkel gefunden worden sind, wird das Maß des Raumwinkels

$$S = 6\varphi - \pi = 6\varphi - 180^\circ$$

sein.

KOROLLAR 2

§33 Wenn der Raumwinkel aus vier einander gleichen Winkeln $= a$ besteht, suche man wegen $n = 4$ den Winkel φ, dass $\sin\varphi = \frac{\cos 45^\circ}{\cos\frac{1}{2}a}$ ist; und daher wird das Maß des Raumwinkels als $S = 8\varphi - 2\pi = 8\varphi - 360^\circ$ gefunden werden.

KOROLLAR 3

§34 Wenn der Raumwinkel aus fünf einander gleichen ebenen Winkeln $= a$ besteht, suche man wegen $n = 5$ den Winkel φ, dass $\sin\varphi = \frac{\cos 36^\circ}{\cos\frac{1}{2}a}$ ist; daher wird also das Maß dieses Raumwinkels $S = 10\varphi - 3\pi = 10\varphi - 540^\circ$ sein.

KOROLLAR 4

§35 Wenn der Raumwinkel aus sechs einander gleichen ebenen Winkeln $= a$ besteht, suche man wegen $n = 6$ den Winkel φ, dass $\sin\varphi = \frac{\cos 30^\circ}{\cos\frac{1}{2}a}$ ist; aber dann wird das Maß dieses Raumwinkels $S = 12\varphi - 4\pi = 12\varphi - 720^\circ$ sein.

SCHOLION

§36 Gemäß dieser Lehren wollen wir die Raumwinkel der fünf regelmäßigen Polyeder berechnen, damit wir sie leichter mit dem rechten Winkel, der bei Körpern gleichermaßen 90 Grad ist, vergleichen können; hier wird es freilich gefällig sein, die Raumwinkel kleiner als 90° als spitz zu bezeichnen, aber die, die über 90° hinausgehen, als stumpf.

DAS MASS DER RAUMWINKEL DES TETRAEDERS

§37 Weil hier die drei ebenen Winkel von 60 Grad zusammenlaufen, um den Raumwinkel festzulegen, wird $\frac{1}{2}a = 30^\circ$ und $n = 3$ sein; daher wird gemäß Korollar 1 die Rechnung mithilfe von Logarithmen so durchgeführt werden:

$$\log\cos 60^\circ = 9,6989700$$
$$\log\cos 30^\circ = \underline{9,9375306}$$
$$\log\sin\varphi = 9,7614394$$

und daher

$$\varphi = 35^\circ 15' 52''$$

also

$$6\varphi = 211^\circ 35' 12'',$$

woher jeder Raumwinkel des Tetraeders als

$$S = 31^\circ 35' 12''$$

gefunden werden wird, und so überragt dieser Winkel kaum ein Drittel des rechten Winkels.

Das Mass der Raumwinkel des Oktaeders

§38 Weil jeder Winkel aus je vier ebenen Winkeln von 60 Grad zusammengesetzt ist, wird $\frac{1}{2}a = 30^\circ$ und $n = 4$ sein; daher führe man gemäß der Lehren von Korollar 2 die Rechnung mit Logarithmen durch wie folgt:

$$\log\cos 45^\circ = 9,8494850$$
$$\log\cos 30^\circ = \underline{9,9375306}$$
$$\log\sin\varphi = 9,9119544$$

und daher wird $\varphi = 54^\circ 44' 8'$ sein, also $8\varphi = 437^\circ 53' 4''$; daher wird das Maß des Raumwinkels des Oktaeders $S = 77^\circ 53' 4''$ sein, welcher Winkel also nicht viel vom rechten abweicht. Außerdem ist dieser Winkel φ das Komplement des vorhergehenden zu 90°.

Das Mass der Raumwinkel des Ikosaeders

§39 Weil dieser Raumwinkel aus je fünf ebenen Winkeln $a = 60^\circ$ zusammengesetzt ist, wird $\frac{1}{2}a = 30^\circ$ und $n = 5$ sein; daher muss nach Korollar 3 die Rechnung so durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \log\cos 36^\circ &= 9{,}9079576 \\ \log\cos 30^\circ &= \underline{9{,}9375306} \\ \log\sin\varphi &= 9{,}9704270 \end{aligned}$$

woher man $\varphi = 69^\circ 5' 41\frac{1}{2}''$, also $10\varphi = 690^\circ 56' 55''$ berechnet; daher wird das Maß des Raumwinkels des Ikosaeders $S = 150^\circ 56' 55''$ sein, welcher Winkel also schon sehr stumpf ist.

Das Mass der Raumwinkel des Hexaeders

§40 Weil hier die einzelnen Raumwinkel aus je drei rechten ebenen Winkel bestehen, wird $a = 90^\circ$, $\frac{1}{2}a = 45^\circ$ und $n = 3$ sein; daher wird nach Korollar 1 die Rechnung wie folgt durchgeführt:

$$\begin{aligned} \log\cos 60^\circ &= 9{,}6989700 \\ \log\cos 30^\circ &= \underline{9{,}8494850} \\ \log\sin\varphi &= 9{,}8494850 \end{aligned}$$

und daher wird $\varphi = 45^\circ$, also $6\varphi = 270^\circ$; daher wird das Maß des Raumwinkels des Hexaeders 90° sein, natürlich ist dieser Winkel auch ein rechter.

Das Mass der Raumwinkel des Dodekaeders

§41 Weil hier jeder Winkel aus je drei ebenen besteht, von denen jeder 108° hat, wird $\frac{1}{2}a = 54^\circ$ und $n = 3$ sein; daher muss die Rechnung gemäß Korollar 1 so durchgeführt werden:

$$\log\cos 60^\circ = 9,6989700$$
$$\log\cos 54^\circ = \underline{9,7692187}$$
$$\log\sin\varphi = 9,9297513$$

und daher wird der Winkel selbst

$$\varphi = 58^\circ 16' 57'' \quad \text{also} \quad 6\varphi = 349^\circ 41' 42,5''$$

sein. Das Maß des Raumwinkels des Dodekaeders wird also $169^\circ 41' 42''$ sein; und so ist dieser Winkel des Dodekaeders unter allen regelmäßigen Körpern der größte.

Scholion

§42 Wenn also der Raumwinkel aus sechs ebenen Winkeln $a = 60^\circ$ gebildet wird, dass $\sin\frac{1}{2}a = 30^\circ$ und $n = 6$ ist, wird der daraus entspringende regelmäßige Körper die Kugel, auf deren Oberfläche alle Raumwinkel auf die Ebene aufgeprägt sind, und so werden sie vier rechten gleichwertig sein; das zeigt auch die gemäß Korollar 4 durchgeführte Rechnung auf:

$$\log\cos 30^\circ = 9,9375306$$
$$\log\cos 30^\circ = \underline{9,9375306}$$
$$\log\sin\varphi = 10,000000$$

und daher der Winkel

$$\varphi = 90^\circ \quad \text{und} \quad 12\varphi = 1080^\circ,$$

woher der Raumwinkel $S = 360^\circ$ wird. Dasselbe passiert, wenn der Raumwinkel aus vier rechten zusammengesetzt ist, dass $\frac{1}{2}a = 45^\circ$ und $n = 4$ ist; denn dann wird

$$\sin\varphi = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1 \quad \text{und daher} \quad \varphi = 90^\circ$$

sein und der Raumwinkel $S = (8-4)90^\circ = 360^\circ$. Wenn schließlich der Raumwinkel aus drei ebenen besteht, sodass $a = 120^\circ$ ist, wird $\frac{1}{2}a = 60^\circ$ und $n = 3$ sein; daher wird wiederum

$$\sin\varphi = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = 90^\circ,$$

und der Raumwinkel $S = (6-2)90^\circ = 360^\circ$.